La géométrie non-commutative

Les mathématiques fonctionnent sur deux registres complémentaires, le « visuel », qui perçoit instantanément le sens d'un théorème sur une figure géométrique, et l' « écrit », qui s'appuie sur le langage, sur l'algèbre, et s'inscrit dans le temps. Selon Hermann Weyl, « l'ange de la géométrie et le diable de l'algèbre » se partagent la scène, ce qui illustre bien les difficultés respectives des deux domaines.

Les travaux d'Alain Connes s'inscrivent dans la relation entre ces deux registres.

Jusqu'à la découverte en 1925 de la mécanique quantique, la géométrie classique était basée sur la dualité, inaugurée par Descartes et l'introduction des coordonnées cartésiennes, entre géométrie et algèbre commutative. L'algèbre commutative, celle que nous avons tous apprise à l'école, est une algèbre où le produit de deux quantités algébriques ne dépend pas de l'ordre des termes, c'est-à-dire que A fois B est égal à B fois A.

Avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, l'espace géométrique des états d'un système microscopique, un atome par exemple, s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position, qui ne commutent plus. Alain Connes illustre son propos : « ce n'est pas la même chose d'ouvrir une canette de bière et de la boire, et d'essayer de la boire puis de l'ouvrir ».

Le but de la géométrie non-commutative est de généraliser la dualité entre espace géométrique et algèbre au cas plus général où l'algèbre n'est plus commutative. Cela conduit à modifier deux concepts fondamentaux des mathématiques, ceux d'espace et de symétrie et à adapter l'ensemble des outils mathématiques, dont le calcul infinitésimal et la cohomologie à ces nouveaux paradigmes.

Loin d'être une simple généralisation, l'intérêt initial de la théorie provient de phénomènes entièrement nouveaux et inattendus qui n'ont pas de contrepartie dans le cas “ classique ” commutatif. Le premier de ces phénomènes est l'apparition naturelle du « temps » à partir de la non-commutativité. Il s'agit là du résultat clé de la thèse d'Alain Connes, qui lui a permis de donner une classification des algèbres d'opérateurs (algèbres de Von Neumann).

La géométrie Riemannienne classique (commutative) qui provient de la découverte au 19^{e} siècle de la géométrie non-euclidienne et sert de cadre à la relativité générale d'Einstein a été ainsi généralisée au cadre « quantique ». Les notions clé de mesure des distances et de courbure s'étendent au cadre non-commutatif mais acquièrent un sens nouveau.

En fait, le passage de la mesure des distances en géométrie Riemannienne à la mesure des distances en géométrie non-commutative est l'exact reflet de l'évolution de la définition du mètre dans le système métrique (1960). La définition originale du mètre, vers la fin du XVIIIe siècle était basée sur le “ mètre des archives ” défini comme une fraction (1/40 000 000) de la plus grande longueur directement mesurable, à savoir la circonférence terrestre. Un changement radical s'est produit en 1960 : le mètre a été redéfini comme un multiple de la longueur d'onde d'une raie spectrale orange de l'isotope 86 du krypton. Plus récemment, en 1983, la définition actuellement en vigueur a été arrêtée, elle utilise le spectre de l'atome de

césium, et s'exprime en unité de temps en utilisant la vitesse de la lumière comme facteur de conversion pour relier temps et longueur.
Le passage de la géométrie de Riemann à la géométrie non-commutative est l'exact parallèle de l'évolution ci-dessus pour le mètre étalon. La mesure des distances utilise les algèbres d'opérateurs. On obtient ainsi une notion d'espace géométrique de nature spectrale, d'une très grande flexibilité. La géométrie non-commutative traite à la fois d'espaces de dimension non-entière, d'espaces de dimension infinie, et surtout d'espaces de nature " quantique ", et enfin de l'espace-temps lui-même si l'on prend en compte non seulement la force électromagnétique (qui avait conduit Poincaré, Einstein et Minkowski à leur modèle de l'espace-temps) mais aussi les forces faibles et fortes qui conduisent à un modèle non-commutatif de l'espace-temps.

Dans la théorie générale des espaces non-commutatifs, la notion de point est remplacée par celle " d'état " du système qui joue un peu le rôle de " nuage de points " et qui est de nature " quantique ". Néanmoins, la mesure des distances, grâce à sa formulation spectrale, continue à avoir un sens et se réduit à la longueur du plus court chemin entre deux points dans le cas classique. Cette nouvelle géométrie prolonge la géométrie classique de Riemann, mais chacune des notions classiques acquiert un sens nouveau. Par exemple, la courbure d'un espace, qui joue un rôle essentiel dans la formulation des équations d'Einstein de la relativité générale, continue à avoir un sens mais devient, pour un espace à quatre dimensions, le calcul de la surface de cet espace. En particulier, cela permet de reformuler de manière purement géométrique et très simple la théorie qui couple la gravitation d'Einstein avec le modèle standard des particules élémentaires.

Alain Connes a récemment travaillé sur la compréhension de la " Renormalisation ". Dans un premier temps, en collaboration avec D. Kreimer, il a relié le " tour de passe-passe " utilisé par les physiciens pour éliminer les quantités infinies au 21^{e} problème de Hilbert[1]. En fait, plus récemment, en collaboration avec M. Marcolli, A. Connes a trouvé la signification de la correspondance de Riemann-Hilbert impliquée dans ce problème de physique et cela les a conduit à identifier un groupe de symétrie qui avait été " deviné " par P. Cartier sous le nom de " groupe de Galois Cosmique ". Ceci établit un lien tout à fait inattendu entre la théorie de Galois, sous sa forme la plus sophistiquée, et la partie de la physique quantique qui est la mieux testée par l'expérience.

---

[1] Lors du second congrès de mathématiques, tenu à Paris en 1900, David Hilbert présenta une liste de 23 problèmes qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec. Ces problèmes devaient, selon Hilbert, marquer le cours des mathématiques du XX^{e} siècle, et l'on peut dire aujourd'hui que cela a été grandement le cas.